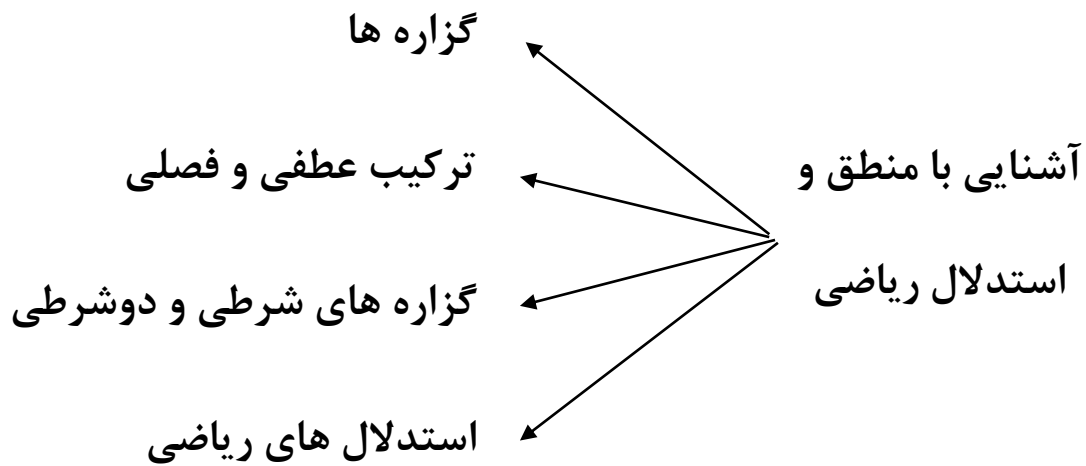




فصل اول:

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی



✓ منطق ریاضی

اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم؛

منطق ریاضی: دستور این زبان است. به عبارت دیگر، منطق ریاضی روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

✓ گزاره:

گزاره جمله‌ای است خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن خبر نداشته باشیم.

نکته ۱: در منطق ریاضی جملات خبری که ارزش گذاری آن‌ها سلیقه‌ای، نامفهوم و یا بی‌معنی باشد گزاره، محسوب نمی‌شوند همچنین جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

؟ مثال ۱: کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟

الف: مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

ب: افلاطون، شاگرد سقراط بود

ج: اولین عدد سه رقمی بر ۵ بخش پذیر است.

د: عدد $\sqrt{3}$ گویا است.

ج: اصالت شما برای کدام شهر است؟

۲ ✓ جبر گزاره‌ها

در منطق ریاضی هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند p, q, r, s و ... نمایش می‌دهیم. بعضی از گزاره‌ها خود ترکیبی از چند گزاره دیگر هستند. که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می‌گوییم.

جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیله یک سری قراردادهای و نماد گذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می‌کند.

نکته ۲: جدول ارزش گذاری مربوط به ۱، ۲ و ۳ گزاره، در حالت کلی به صورت مقابل می‌باشد. همچنین

ارزش درست یک گزاره را با حرف «T» یا «د» و ارزش نادرست یک گزاره را با حرف «F» یا «ن» نشان

می‌دهیم.

P
T
F

$$2^1 = 2$$

یک گزاره

P	q
T	T
T	F
F	T
F	F

$$2^2 = 4$$

دو گزاره

p	q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

$$2^3 = 8$$

سه گزاره

نکته ۳: اگر n تعداد گزاره‌های دلخواه باشد، جدول ارزش گذاری دارای 2^n ردیف خواهد بود.

نقیض یک گزاره: نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک

گزاره مانند p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم.

۳

نکته ۴: اگر گزاره ساده p به شکل یک جمله فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است

که فعل جمله را نقیض کنیم.



نکته ۵: اگر گزاره‌ی ساده‌ی مورد نظر، شامل یک نماد ریاضی باشد، نقیض آن به صورت زیر تعریف

می‌شود.

نماد ریاضی	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$=$	$\neq$	$\in$	$\notin$	$\subseteq$	$\not\subseteq$
نقیض نماد	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$	$\neq$	$=$	$\notin$	$\in$	$\not\subseteq$	$\subseteq$

✓ گزاره‌های هم ارز:

دو گزاره را زمانی هم ارز می‌گوییم که ارزش آن‌ها یکسان باشد، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. هم

ارزی دو گزاره p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.



نکته ۶: اگر داشته باشیم $p \equiv q$ ، آن‌گاه $\sim p \equiv \sim q$ ، به عبارتی هرگاه دو گزاره هم‌ارز باشند، نقیض

آن‌ها نیز هم‌ارز هستند.



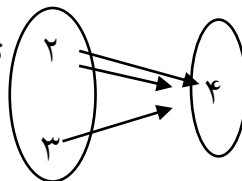
تمرین ۱: کدام گزینه زیر ارزش نادرست دارد؟

(۱) بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، ۹۷ است.

(۲) عدد طبیعی ۹۹ مربع کامل نیست.

(۳) در مثلث خیام، مجموع اعداد سطر سوم برابر ۴ است.

(۴) نمودار ون



تابع نیست.



تمرین ۲: تعداد ردیف‌های جدول ارزش گذاری مربوط به ۵ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش

گذاری ۷ گزاره‌ای است؟

$$\frac{1}{5} (۴)$$

$$۵ (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$۴$$

$$(۱)$$

تمرین ۳: کدام هم‌ارزی درست است؟



$$\sim (a^2 < b^2) \equiv (a^2 > b^2) \quad (۱)$$

$$\sim (\sqrt{5} \in Q) \equiv (\sqrt{5} \notin Q) \quad (۲)$$

$$\sim [\sim (\frac{1}{3} < \frac{2}{9})] \equiv (\frac{1}{3} \geq \frac{2}{9}) \quad (۳)$$

(۴) وزن افراد، متغیر کیفی ترتیبی است $\equiv (x^4 + 1)$ همواره مثبت است.

تمرین ۴: در کدام گزینه دو عبارت کنار هم، نقیض یکدیگر نیستند؟



$$x^2 - 3x \neq 2 \text{ و } x^2 - 3x = 2 \quad (۲) \quad \mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z} \text{ و } \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad (۱)$$

(۳) a عددی فرد است، a عددی زوج است. (۴) a عددی مرکب است، a عددی اول است.

تمرین ۵: کدام گزینه با گزاره‌ی «مختصات رأس سهمی $y = (x - 1)^2 + 4$ برابر $S(2, 4)$ است» هم‌ارز



می‌باشد؟

(۱) میانه‌ی داده‌های ۱۵ و ۱۲ و ۱۰ و ۹ و ۵ و ۲ و ۱ برابر ۹ است.

(۲) میانگین داده‌های ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ برابر ۵ است.

(۳) دامنه‌ی تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ است.

(۴) مد داده‌های ۳ و ۳ و ۱ و ۱۷ و ۵ و ۳ و ۱ برابر ۳ است.

✓ ترکیب گزاره‌ها:

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها: به شکل های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند.

برای شما ترکیب گزاره‌ها را با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر... آن‌گاه... و برعکس» انجام می‌دهیم.

✓ ترکیب عطفی دو گزاره:

اگر دو گزاره‌ی ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم، ترکیب عطفی p, q را با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۷: جدول ارزش درستی $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نکته ۸: نادرستی حتی یکی از گزاره‌ها، باعث نادرستی کل گزاره‌ی $p \wedge q$ می‌شود.

مثال ۲: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. 

الف) ۳۶ مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویا است.

ب) $(-3 \notin Z) \wedge (N \subset Z)$

ج) $[x(x-2) = x^2 - 2x] \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$

د) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامنفی است.

✓ ترکیب فصلی دو گزاره:

اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکب حاصل، ترکیب فصلی آن دو گزاره نام دارد.
ترکیب فصلی دو گزاره p و q را به شکل $p \vee q$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۹: جدول ارزش گذاری $p \vee q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نکته ۱۰: درستی حداقل یکی از گزینه‌ها، باعث درستی کل گزار $p \vee q$ می‌شود.

مثال ۳: درستی یا نادرستی گزاره‌های فصلی زیر را تعیین کنید. ?

الف) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $N \cap Z = Z$

ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ - عددی منفی است.

ج) ۹۰ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

د) $(\sqrt{2} > \sqrt{2}-1) \vee [(-2)^{-4} = 16]$

مثال ۴: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام گزینه در مورد ستون نتیجه گزاره‌ی $\neg(p \wedge \neg q) \vee q$ درست ?

است؟

مثال ۵: جدول ارزش گذاری گزاره‌ی $\neg p \vee (p \wedge \neg q)$ را تشکیل دهید.

✓ خواص و فرمول‌های اصلی ترکیب عطفی و فصلی

در بسیاری از تست‌ها برای حل سریع‌تر و بدون رسم جدول ارزش گذاری می‌توانیم از فرمول‌های زیر استفاده کنیم. با فرض آنکه p و q دو گزاره دلخواه باشند و T گزاره همواره درست و F گزاره همواره نادرست باشد، خواهیم داشت:

قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی
$(p \wedge p) \equiv p$	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$	$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$
$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$	$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
$(p \wedge \neg p) \equiv (\neg p \wedge p) \equiv F$	$(p \vee \neg p) \equiv (\neg p \vee p) \equiv T$

در زیر روابطی آمده است که فقط در تست‌ها کاربرد دارد و نیازی به اثبات از طریق جدول ارزش گذاری ندارند.

قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی
$P \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ شرکت پذیری	$P \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ شرکت پذیری
$P \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ توزیع پذیری	$P \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ توزیع پذیری
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ دمرگان	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ دمرگان
$P \wedge (p \vee q) \equiv p$ جذب	$P \vee (p \wedge q) \equiv p$ جذب
$P \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$ شبه جذب	$P \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$ شبه جذب



تمرین ۶: در صورتی که گزاره‌ی $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $\sim (p \vee q) \wedge \sim (\sim r)$ کدام است؟

(۱) T (۲) F (۳) r (۴) $\sim r$



تمرین ۷: در جای خالی چه گزاره‌ای را قرار دهیم تا ارزش گزاره حاصل، درست باشد؟

(مربع هر عدد بین صفر و یک، از خود عدد کوچک‌تر است) $\wedge (\dots \dots \dots) \wedge (4^2 \leq 2^4)$

(۱) تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها از چارک اول هستند.

$$(2) |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

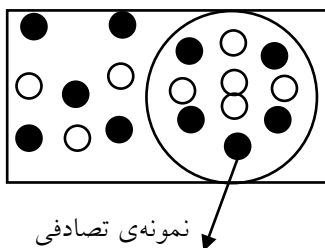
$$(3) \sim (\delta \in Z) \equiv \delta \in N$$

$$(4) \text{ حاصل کسر } \frac{x^2-4}{x^2-16} \text{ برابر است با } \frac{1}{x^2-4}$$



تمرین ۸: با توجه به شکل زیر در مورد گزاره‌ی «پارامتر دایره‌های توپر برابر ۱۰ و آماره‌ی دایره‌های توخالی برابر

جامعه‌ی آماری



۸ است» چه می‌توان گفت؟

(۱) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{9}$ و $\frac{4}{9}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۲) گزاره درست است و نیازی به تغییرات ندارد.

(۳) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{9}$ و $\frac{1}{9}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۴) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب ۱۸ و ۲۸ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.



تمرین ۹: در جای خالی چه عبارتی قرار گیرد تا گزاره‌ی زیر درست شود؟ (.... یا شدت زلزله، متغیر کیفی اسمی

است.)

(۱) مرکب است.

(۲) $\sqrt{3}$ گویا است.

(۳) با دو برابر شدن داده‌ها مد هم دو برابر می‌شود.

(۴) با ۳ برابر شدن داده‌ها میانه تغییری نمی‌کند.

تمرین ۱۰: حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟ $\neg p \vee \neg (q \vee \neg p) \equiv ?$ 

$\neg p \vee \neg q$ (۱) $\neg p \wedge \neg q$ (۲) T (۳) F (۴)

تمرین ۱۱: اگر ارزش گزاره $(\neg p \vee \neg q)$ درست باشد و گزاره‌ی دلخواه باشد، گزاره $q \vee (p \wedge r)$ با کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارز است؟ 

F (۱) p (۲) q (۳) T (۴)

تمرین ۱۲: طرف دوم هم‌ارزی $\neg q \vee \neg (p \vee q) \equiv ?$ کدام است؟ 

p (۱) q (۲) $\neg p$ (۳) $\neg q$ (۴)

تمرین ۱۳: ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟



الف) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یا $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

ب) معادله‌ی $x^2 - 3x = 0$ دو ریشه غیر صفر دارد و عدد ۲۰ مضرب ۵ هست.

ج) در تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ متغیر x وابسته است و شیب‌های هر دو خط موازی با هم برابر هستند.

د) درآمد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا انحراف معیار جذر واریانس است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

تمرین ۱۴: اگر گزاره‌ی $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ درست باشد و r نیز نادرست باشد، گزاره‌ی



$\sim p \vee (q \wedge r)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

T (۴)

F (۳)

q (۲)

P

(۱)

تمرین ۱۵: ستون پایانی جدول مقابل کدام است؟ 

p	q	$\sim (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	?
T	F	?
F	T	?
F	F	?

T
F
T
F

(۴)

F
F
F
T

(۳)

F
F
T
T

(۲)

F
T
F
T

(۱)

✓ ترکیب شرطی دو گزاره:

اگر بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد $(\Rightarrow)$ استفاده کرده و می نویسیم $p \Rightarrow q$ و آن را به شکلهای زیر می خوانیم:

*اگر p آنگاه q * p نتیجه می دهد q را * p از q نتیجه می شود.

* p شرط کافی است برای q

* q شرط لازم است برای p

نکته ۱۱: جدول ارزش گذاری $(p \Rightarrow q)$ به صورت مقابل است:

مقدم p	تالی q	$(p \Rightarrow q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \Rightarrow q)$ فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

نکته ۱۲: اگر به دو ردیف آخر جدول دقت کنید می بینید که در هر دو حالت مقدم ارزش نادرست دارد ولی ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست است. در این دو حالت می گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم؛ درست است. یعنی بخاطر نادرست بودن مقدم، می گوییم تالی چه درست باشد چه نادرست، کل گزاره درست است.

مثال ۶: ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید. ?

الف) اگر ۱۳ اول است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است. ب) اگر ۷ زوج باشد، آنگاه π گویا است.

ج) زوج بودن عدد ۴ نتیجه می دهد اول بودن عدد ۸ را د) $(N \subset R) \Rightarrow (N \subset Z)$



نکته ۱۳: در گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ گاهی اوقات p و q به هم وابسته هستند، یعنی درستی آنها را نمی توانیم به طور مستقل بررسی کنیم. در این شرایط p را درست در نظر می گیریم، پس با فرض درستی p ارزش گزاره q را بررسی می کنیم تا درستی و نادرستی آن معلوم شود.



مثال ۷: کدام گزاره ارزش نادرست دارد؟

(۱) اگر a فرد باشد، آنگاه a^2 هم فرد است.

(۲) تابع بودن $f = \{(5, 3), (a, 1)\}$ شرط لازم است برای آنکه a برابر ۲ باشد.

(۳) اگر داده ها را با یک عدد ثابت جمع کنیم آن گاه به میانگین نیز همان عدد ثابت اضافه می شود.

(۴) $(x^2 \text{ هم عددی اول است}) \Rightarrow (x \text{ عددی اول است})$



مثال ۸: اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست باشد و r نیز گزاره ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره همواره نادرست است؟

$$(1) (\sim p \Rightarrow q) \vee r \quad (2) (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge r$$

$$(3) (\sim p \vee q) \Rightarrow \sim r \quad (4) (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$$



نکته ۱۳: اگر گزاره $p \Rightarrow q$ را عکس و نقیض کنیم تبدیل به گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ می شود که هر دو گزاره هم ارز هستند، یعنی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ برای اثبات این رابطه از جدول زیر استفاده می کنیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
<u>T</u>	<u>T</u>	<u>F</u>	<u>F</u>	<u>T</u>	<u>T</u>
<u>T</u>	<u>F</u>	<u>F</u>	<u>T</u>	<u>F</u>	<u>F</u>
<u>F</u>	<u>T</u>	<u>T</u>	<u>F</u>	<u>T</u>	<u>T</u>
<u>F</u>	<u>F</u>	<u>T</u>	<u>T</u>	<u>T</u>	<u>T</u>



نکته طلایی: اگر p و q به عنوان دو گزاره دلخواه باشند، دو گزاره و $(\neg p \vee q) \cdot (p \Rightarrow q)$

هم‌ارز هستند.

به عبارتی دیگر برای تبدیل گزاره شرطی به فصلی، گزاره اول نقیض می‌شود و به جای $\Rightarrow$ از $\vee$ استفاده می‌شود و گزاره دوم تغییری نمی‌کند.

$$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$$

مثال ۹: بدون استفاده از جدول ارزش گذاری، حاصل $(p \Rightarrow q) \wedge \neg p$ کدام است؟



$$(1) \quad p \vee q \quad (2) \quad p \vee \neg q \quad (3) \quad p \wedge q \quad (4) \quad p \wedge \neg q$$

ترکیب دو شرطی دو گزاره:

اگر در گزاره‌ای بخواهیم هم از p به q برسیم و از q به p ، از نماد « $p \Leftrightarrow q$ » استفاده می‌کنیم که آن را گزاره دو شرطی می‌نامیم که هم‌ارزی آن به شکل روبرو است؟

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ را به شکل‌های زیر می‌خوانیم.

❖ P اگر و تنها اگر q

❖ اگر p آن‌گاه q و برعکس

❖ P نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را

❖ P شرط لازم و کافی است برای q

ارزشیابی گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$

❖ گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی ارزش درست دارد که p و q هم‌ارز باشند، یعنی هر دو درست باشد یا هر دو

نادرست باشند. ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ در جدول زیر تعیین شده است.

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

«درست بودن p و q و همچنین نادرست بودن p و q باعث درستی $p \Leftrightarrow q$ می‌شود.»

مثال ۱۰ (مهم): جدول ارزش گذاری مربوط به گزاره مقابل را رسم کنید.

$$[(p \Rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \equiv ?$$

تمرین ۱۶: نقیض گزاره $p \Rightarrow \neg q$ کدام است؟

$$\neg p \wedge \neg q \quad (۴) \quad p \wedge q \quad (۳) \quad p \Rightarrow q \quad (۲) \quad q \Rightarrow p \quad (۱)$$

تمرین ۱۷: اگر $(p \vee q) \equiv F$ باشد، گزاره $(p \Rightarrow q) \vee (q \Leftrightarrow \neg p)$ با کدام گزینه زیر هم‌ارز است؟

$$\neg p \quad (۴) \quad \text{نامعلوم} \quad (۳) \quad \text{هم‌ارز با } p \quad (۲) \quad F \quad (۱) \quad T$$

تمرین ۱۸: اگر $(p \vee q) \equiv T$ باشد، حاصل هم‌ارزی $(\neg q \Rightarrow p) \vee (\neg p \Rightarrow q)$ با کدام است؟

$$\neg p \quad (۴) \quad \text{هم‌ارز با } \neg q \quad (۳) \quad \text{هم‌ارز با } p \quad (۲) \quad F \quad (۱) \quad T$$

تمرین ۱۹: حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟ $(\neg p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p) \equiv ?$



(۱) T (۲) F (۳) p (۴) q

تمرین ۲۰: به کمک فرمول گزاره‌ها، گزاره‌ی $\neg p \Rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow p$ با کدام گزاره‌ی زیر، هم‌ارز است؟



(۱) $\neg p \wedge (\neg q \vee r)$ (۲) T (۳) F (۴) $\neg p \Rightarrow (q \wedge r)$

تمرین ۲۱: اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\neg q \Rightarrow p$ درست باشند، کدام گزینه صحیح است؟



(۱) اگر ارزش p درست باشد، ارزش q نادرست است.

(۲) اگر ارزش p درست باشد، ارزش q هم درست است.

(۳) اگر ارزش p نادرست باشد، ارزش q نادرست است.

(۴) هر سه گزینه صحیح هستند.

تمرین ۲۲: حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟ $\neg(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv ?$



(۱) T (۲) F (۳) $p \vee q$ (۴) $q \wedge p$

تمرین ۲۳: با توجه به جدول، به جای A، B، C چه ارزش‌هایی باید قرار گیرد؟



گزاره q: $-a^2 \leq 0$	گزاره p: ۱۰۵ عددی مرکب است
C	A

(۱) $C \equiv F . B \equiv F . A \equiv T$ (۲) $C \equiv F . B \equiv T . A \equiv F$

(۳) $C \equiv T . B \equiv T . A \equiv F$ (۴) $C \equiv F . B \equiv T . A \equiv T$

تمرین ۲۴: با توجه به جدول مقابل، به جای A و B و C چه ارزش هایی باید قرار گیرند؟



$p \vee \sim q$	p	q	$\sim (p \Leftrightarrow q) \wedge \sim p$
F	A	B	C

$$C \equiv F . B \equiv F . A \equiv T \quad (۲) \qquad C \equiv T . B \equiv T . A \equiv T \quad (۱)$$

$$C \equiv T . B \equiv F . A \equiv F \quad (۴) \qquad C \equiv T . B \equiv T . A \equiv F \quad (۳)$$

تمرین ۲۵: ارزش گزاره « ۸۰ مربع کامل است و نمودار حبابی، همان نمودار پراکنش نگاشت است که نقاط آن،

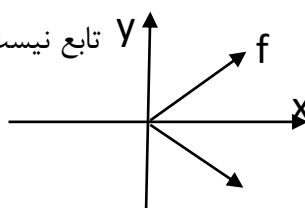


تبدیل به دایره شده‌اند.» با ارزش نقیض کدام گزاره برابر است؟

(۱) a و b هر دو فرد هستند. $\Rightarrow$ اگر $(a + b)$ زوج باشد

(۲) (محیط هم ۵ برابر می‌شود) $\Rightarrow$ اگر شعاع دایره ۵ برابر شود

(۳) $(2 \notin Z) \Leftrightarrow$ نمودار تابع نیست.



(۴) ۳/۱۴ عددی گنگ است و رابطه‌ی $g = \{(3.7), (1.8)\}$ تابع نیست.

تمرین ۲۶: اگر p گزاره‌ای نادرست، q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، چند تا از گزاره‌های زیر همواره



نادرست اند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(آ) $\sim (p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$ (ب) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$

(ج) $\sim q \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ (ت) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$



تمرین ۲۷: اگر گزارش گزاره‌ی $q \Rightarrow (p \vee r)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \vee q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg p)$ کدام

است؟

(۱) T (۲) F (۳) با r هم ارز است (۴) با q هم ارز است



تمرین ۲۸: با استفاده از فرمول‌های مربوط به گزاره‌های عطفی، فصلی و شرطی، گزاره‌ی $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ با

کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

(۱) $\neg (p \wedge q) \wedge r$ (۲) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow r$

(۳) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (۴) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$



نکته ۱۴: قبل از بحث استدلال ها بهتر است روش تبدیل عبارت ها و گزاره های فارسی را به نمادها و

علائم ریاضی مربوطه یادآوری کنیم.

نماد ریاضی	عبارت فارسی	نماد ریاضی	عبارت فارسی
$x \cdot y$	حاصلضرب دو عدد	$2x$	۲ برابر عددی
$1/x$	معکوس عددی	$\frac{1}{2}x$	نصف عددی
$ x $	قدر مطلق عددی	$\frac{1}{3}x$	ثلث عددی
$ y-x $ یا $ x-y $	قدر مطلق تفاضل دو عدد	x^2	مربع عددی
$x > a$	X از عدد a بزرگتر است	x^2	مجدور عددی
$x \leq a$	X کوچکتر یا مساوی عدد است	x^3	مکعب عددی
$x \neq a$	X با عدد a مساوی نیست	$\sqrt{x}$	جذر عددی
$1/x + 1/y$	مجموع معکوس دو عدد	$\sqrt[n]{x}$	ریشه n ام عددی

✓ استدلال ریاضی

(۱) استدلال استثنائی:

این استدلال که قیاس استثنائی هم نامیده می شود، از بهترین روش ها در استدلال به حساب می آید و به شکل کلی زیر است:

مقدمه ۱: (اگر p آنگاه q)

مقدمه ۱: $p \Rightarrow q$

مقدمه ۲: p

مقدمه ۲: p

$\therefore q$

$\therefore q$

علامت (∴) به معنای نتیجه گیری است.

به عنوان مثال استدلال زیر استثنائی است.

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه باشد، آنگاه به مدرسه نمی روم.

مقدمه ۲: امروز جمعه است.

∴ امروز به مدرسه نمی روم.



نکته ۱۵: استدلال استثنائی بر اساس روش درست عمل می کند، ولی باید بدانیم که نتیجه این استدلال (q) زمانی قطعاً درست خواهد بود که مقدمه اول درست باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱: اگر روزی ۱۰ صفحه درس بخوانید، آنگاه در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می شوید.

مقدمه ۲: علی روزی ۱۰ صفحه درس می خواند.

∴ علی در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می شود.

این نوع استدلال از لحاظ ساختاری درست است ولی نمی توانیم بگوییم نتیجه به دست آمده حتماً درست است. چون مقدمه ۱ ممکن است درست نباشد.

(۲) مغالطه (سفسطه یا مغلطه)

روش به کار رفته در این نوع استدلال نادرست است و شکل کلی آن به صورت زیر است:

مقدمه ۱: (اگر p آنگاه q)

مقدمه ۱: $p \Rightarrow q$

مقدمه ۲: q

مقدمه ۲: q

∴ p

∴ p

به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱: اگر کسی از من متنفر است آنگاه پشت سر من حرف می زند.

مقدمه ۲: رضا پشت سر من حرف می زند.

∴ رضا از من متنفر است.

نتیجه به دست آمده ممکن است درست یا نادرست باشد، ولی این نوع استدلال در علم منطق نادرست است.

نکته ۱۶: البته نتیجه مغالطه گاهی اوقات درست است. به مثال زیر توجه کنید:



مقدمه ۱: اگر کسی در امتحان به تمام سوالات جواب درست دهد آنگاه نمره اش ۲۰ می شود.

مقدمه ۲: نمره علی در ریاضی ۲۰ شده است.

∴ علی به تمام سوالات درس ریاضی درست جواب داده است.

در این مثال با این که نوع استدلال، مغالطه است ولی نتیجه آن درست است. البته باید توجه داشت بر اساس

کتاب درسی روش به کار رفته در مغالطه نادرست است، ولی نتیجه ممکن است درست باشد.

(۳) استفاده از عکس نقیض گزاره شرطی :

در بعضی موارد به جای اثبات گزاره $p \Rightarrow q$ بهتر است که درستی $\neg q \Rightarrow \neg p$ را نشان دهید.

برای مثال اثبات گزاره Kn زوج است. $\Rightarrow K^2$ عددی زوج است. کاری مشکل و زمان بر است پس ما عکس نقیض

آن را اثبات می کنیم. یعنی گزاره K^2 زوج نیست. $\Rightarrow K$ زوج نیست را اثبات می کنیم.

همان طور که قبلا اشاره شد K زوج نیست ، یعنی K فرد است، پس ثابت می کنیم K^2 هم فرد است.

$$n \in \mathbb{Z} \begin{cases} \text{نماد اعداد زوج } 2n \\ \text{نماد اعداد فرد } 2n + 1 \end{cases}$$

$$K^2 = 2n + 1 \xrightarrow{\text{به توان 2}} K^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \\ = 2m + 1 \quad (m \text{ عددی صحیح است})$$

$(2m+1)$ عددی فرد است. پس ثابت شد K^2 هم فرد است.



نکته ۱۷: در این گونه سوالات همیشه از عدد ۲ فاکتور می گیریم و داخل پرانتز را m می نامیم. اگر به $2m$ رسیدیم، می گوئیم عدد زوج است، و اگر به $2m+1$ و $2m-1$ رسیدیم، می گوئیم عدد فرد است.

یافتن محل خطا در محاسبات:

به نکات زیر توجه کنید :

۱- دو طرف یک معادله را نمی توانیم بر یک متغیر (مانند x) تقسیم کنیم، زیرا ممکن است مقدار آن متغیر صفر

باشد و در این صورت به کسر $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ برخورد می کنیم که تعریف نشده می باشد.

۲- در یک کسر که صورت جمع و تفریق می باشد، مجاز به ساده کردن نیستیم، مگر این که به کمک تجزیه و یا فاکتور گیری آن ها را به حاصل ضرب تبدیل کنیم.

۳- در یک نامعادله، طرفین را نمی توان در عددی که علامتش را نمی دانیم ضرب یا بر آن تقسیم کنیم. زیرا می دانید که دو طرف نامعادله را در یک عدد منفی، ضرب یا بر آن تقسیم کنیم جهت نامعادله عوض می شود.

۴- در شکل های هندسی مثل دایره، مستطیل، مثلث و... اگر شعاع یا ابعاد شکل K برابر شوند، نمی توان گفت که مساحت هم K برابر می شود.

تمرین ۲۹: کدام گزاره ریاضی به اشتباه به گزاره فارسی تبدیل شده است؟



(۱) $x \in N \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$: معکوس هر عدد طبیعی بزرگ تر از معکوس مربع همان عدد است.

(۲) $x \in R \Rightarrow \frac{x^2}{5} = \frac{x}{3} + 1$: خمس مربع هر عدد حقیقی برابر است با ثلث آن عدد به علاوه ۱

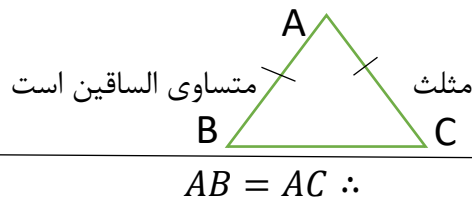
(۳) $x \in Z^+ \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$: جذر خمس هر عدد صحیح مثبت برابر است با جذر عدد صحیح بلافاصله قبل از آن عدد

(۴) $x \in Q \Rightarrow 2x \leq |x-1|$: دو برابر هر عدد گویا کوچکتر یا مساوی قدر مطلق تفاضل آن عدد از یک است.

تمرین ۳۰: صرف نظر از نتیجه روش کدام استدلال زیر نادرست است؟



(۲) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، آن گاه دو ساق برابر دارد.



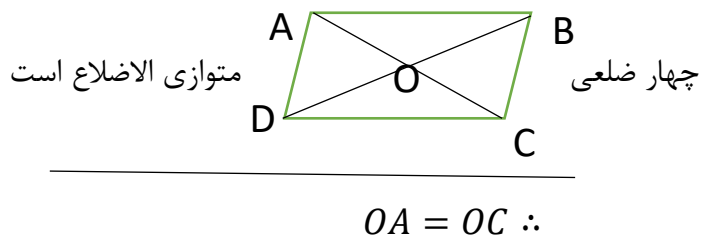
(۱) $x < 0 \rightarrow x^4 \geq 0$

$(-6) < 0$

$\therefore (-6)^4 \geq 0$

(۴) اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد،

آن گاه قطرهاش همدیگر را نصف میکنند.



(۳) اگر دو عدد اول نباشد، آن گاه

مجموعشان مرکب است.

$$\frac{x + y = 200}{\therefore x \text{ و } y \text{ اول هستند}}$$



تمرین ۳۱: با توجه به استدلال زیر، کدام گزینه درست است؟

مقدمه ۱: اگر روی یک بسته شکلات عبارت $(x \pm y)$ گرم نوشته شده باشد، آن گاه وزن ۹۶٪ شکلات ها بین $x-y$ و $x+y$ گرم است.

مقدمه ۲: روی یک بسته شکلات عبارت (40 ± 2) گرم نوشته شده است.

∴ ۹۶٪ شکلات ها وزنشان بین ۳۸ و ۴۲ گرم است.

(۱) نام این استدلال ، مقاله است (۲) روش این استدلال نادرست است

(۳) نام این استدلال، استثنایی است (۴) روش این استدلال، ممکن است نادرست باشد



تمرین ۳۲: در مورد استدلال زیر کدام گزینه نادرست است؟

مقدمه ۱: اگر در رانندگی تمرکز نداشته باشید آن گاه تصادف خواهید کرد.

مقدمه ۲: رضا با ماشینش تصادف کرد

∴ رضا موقع رانندگی ، تمرکز نداشته است.

(۱) نوع این استدلال، مقاله یا سفسطه است. (۲) روش این نوع استدلال، نادرست است.

(۳) نتیجه این استدلال، قطعاً نادرست است. (۴) نتیجه این استدلال ، ممکن است درست باشد



تمرین ۳۳: به استدلال های زیر توجه کنید.

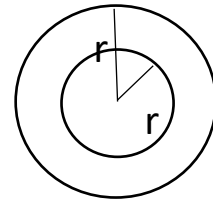
$$x^2 = y^2 \rightarrow |x| = |y| \quad \text{استدلال}$$

$$(-3)^2 = 3^2$$

$$\therefore |-3| = |3|$$

استدلال (۲) اگر شعاع دایره ای نصف شعاع دیگر باشد، آن گاه مساحت آن هم نصف می شود.

$$r = \frac{1}{2} r' \quad \text{داریم}$$



در شکل

$$S = \frac{1}{4} S' \therefore$$

- در مورد نتایج این استدلال ها کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نتیجه هردو استدلال درست است

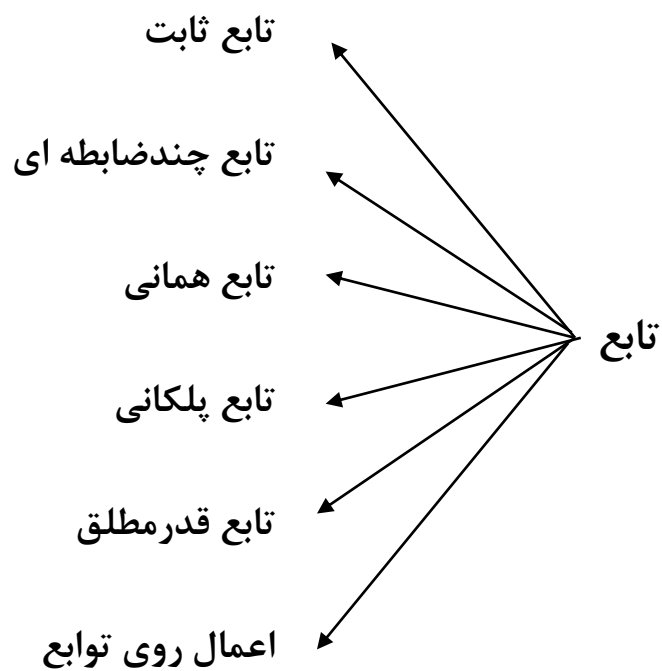
(۲) نتیجه هر دو استدلال نادرست است

(۳) نتیجه استدلال (۱) و نتیجه استدلال (۲) نادرست است

(۴) نتیجه استدلال (۲) درست و نتیجه استدلال (۱) نادرست است.

فصل دوم:

تابع (۲)



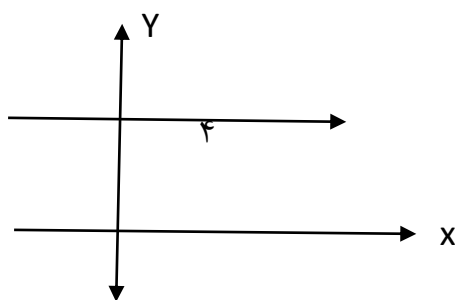
در کتاب دهم با مفهوم تابع به طور کامل آشنا شده اید در این بخش چند تابع خاص را بررسی میکنیم.

✓ تابع ثابت :

به هر تابع که برد آن تک عضوی باشد، ثابت می گوئیم. این تابع به هر عضو از دامنه اش، فقط یک عدد مشخص و ثابت را نسبت می دهد.

نکته ۱۸: اگر در یک مسئله فقط گفته شود ضابطه ی تابع $F(x)=4$ است، دامنه اش را R فرض می کنیم

و نمودارش به شکل مقابل است.



مثال ۱۱: اگر تابع $f = \{(1, a + 2b), (a, 6), (3, a - b)\}$ یک تابع ثابت باشد مقادیر a و b را بدست آورید؟

✓ تابع چند ضابطه ای :

در این نوع توابع به جای یک ضابطه (یک فرمول) دو ضابطه یا بیشتر وجود دارد که هر کدام دامنه مخصوص به خود را دارند.

مثال ۱۲: اگر $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & x \geq 0 \\ \sqrt{-x + 7} & x < 0 \end{cases}$ باشد، مقادیر $f(0)$ و $f(1)$ و $f(-2)$ و $f(f(0))$ را بدست آورید؟

رسم نمودار توابع چند ضابطه ای :

برای رسم نمودار یک تابع دو یا چند ضابطه ای، هر یک از ردیف های آن را یک تابع مستقل فرض کرده و نمودارش را رسم می کنیم.

نکته ۱۹: اگر دامنه یک ردیف مثلا به شکل $x \geq a$ بود، به x یک بار a را نسبت می دهیم و بار دیگر عددی دلخواه و بزرگ تر از a و همچنین اگر دامنه به شکل $a \leq x \leq b$ باشد، x را یکبار a و یک بار b فرض می کنیم.

نکته ۲۰: اگر در یک یا چند ردیف تابع چند ضابطه ای، ضابطه درجه دوم داشته باشیم از ۳ نقطه کمکی برای آن ردیف استفاده می کنیم.

مثال ۱۳: نمودار مقابل را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 6 & 2 \leq x < 5 \\ x - 8 & x \geq 5 \end{cases}$$

نوشتن ضابطه برای نمودار یک تابع چند ضابطه ای :

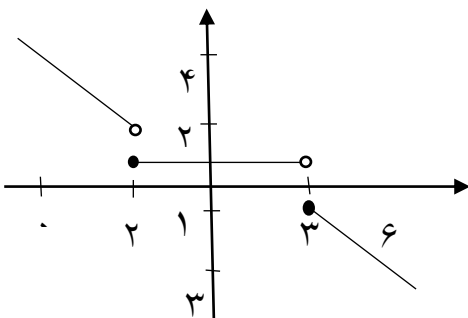
در این گونه سوالات دیگر خبری از سهمی نیست فقط با نیم خط ها و پاره خط ها سروکار داریم فقط کافی

است در هر قسمت از نمودار، دو نقطه را انتخاب کرده و از فرمول های $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و $y - y_1 = m(x - x_1)$

استفاده کنیم تا به ضابطه آن قسمت برسیم اگر هم قسمتی از نمودار به صورت نیم خط یا پاره

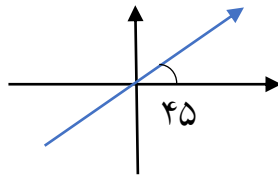
خط افقی بود، نیازی به استفاده از هیچ فرمولی نیست.

مثال ۱۴: ضابطه تابع مقابل را بدست آورید؟



✓ تابع همانی :

این تابع به هر عضو از دامنه، همان مقدار از برد را نسبت می دهد، یعنی ضابطه آن به صورت $y=x$ یا $f(x)=x$ می باشد، اگر دامنه این تابع را R فرض کنیم نمودارش همان نیمساز ربع اول و سوم است.



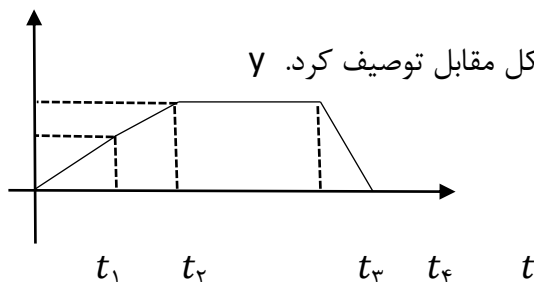
مثال ۱۵: اگر تابع $f = \left\{ (a-1, 5), (b+3, 8), \left(\frac{c}{4}, 10\right) \right\}$ یک تابع همانی باشد، مقادیر a و b و c را

بدست آورید؟

نکته ۲۱: اگر مختصات نقطه ای مانند $A(x_1, y_1)$ در معادله ی خطی صدق کرد می فهمیم که آن نقطه روی آن خط واقع است.

مثال ۱۶: مقدار n را طوری بیابید که نقطه $A(1, n^2 - 5n - 5)$ روی خط نیمساز ربع اول و سوم باشد؟

نکته ۲۲: هر چه قدر خطی عمودی تر باشد، قدر مطلق اندازه شیبش بزرگ تر است. به شکل مقابل توجه کنید می توان داستان زیر را برای شکل مقابل توصیف کرد. y

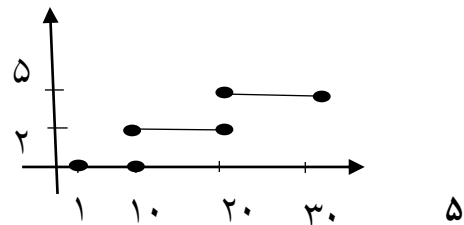


علی با سرعت کمی در حال حرکت بود (با ماشین) ناگهان ماشین پشت او برایش چراغ زد که تند تر برود. علی هم سرعتش را بیشتر کرد تا به چراغ قرمز رسید و پس از مدتی دوباره شروع به حرکت کرد ولی این بار با سرعت زیاد.

✓ تابع پلکانی :

یک تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه ، مقدار تابع عددی ثابت باشد (متغیر نداشته باشد) به عنوان مثال تابع f یک تابع پلکانی است :

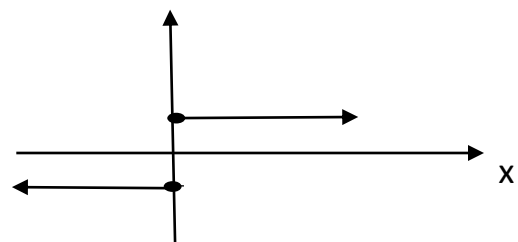
$$f(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x < 1.0 \\ 2 & 1.0 \leq x < 2.0 \\ 5 & 2.0 \leq x < 3.0 \end{cases}$$



✓ تابع علامت (تابع sign(x)) :

این تابع نوعی پلکانی محسوب می شود و ضابطه آن به شکل زیر است :

$$f(x)sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



دامنه و برد تابع علامت بالا برابر است با :

$$D_f = R, R_f = \{-1, 0, 1\}$$

تمرین ۳۴: اگر $sign(x^2 - x - 2) = 0$ باشد، چه مقادیری میتواند اختیار کند؟



۱) -۲ و -۱ ۲) ۲ و -۱ ۳) ۳ و -۲ ۴) ۴ و ۲

۳۱

نکته ۲۳: براکت هر عدد صحیح، برابر خود آن عدد است. $[۳۲] = ۳۲$ و $[۰] = ۰$ و هم چنین براکت هر عدد

اعشاری، برابر است با عدد صحیح بلافاصله قبل از آن عدد اعشاری؛

لذا $[۴/۹] = ۴$ و $[-۵/۸] = -۶$

مثال ۱۷: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید. 

$$۱) A = 3[-4] + 5[3/8]$$

$$۲) B = \frac{2[-0/5] + [1]}{3[-6/3]}$$

تابع جزء صحیح: 

به تابع با ضابطه $f(x)=[x]$ یا $y=[x]$ تابع براکت می گوئیم اگر در متن سوال دامنه به ما داده نشود ، خودمان R فرض می کنیم ولی معمولاً همیشه دامنه در صورت سوال داده می شود.

مثال ۱۸: نمودار تابع $y=[x]$ را با دامنه $-1 \leq x \leq 3$ رسم کنید ؟ 

مثال ۱۹: مساحتی که نمودار تابع $y=[x]-1$ با دامنه $0 \leq x < 2$ با محور x ها و خطوط عمودی $x=0$ 

و $x=1$ و $x=2$ می سازد کدام است؟

نکته ۲۴: در توابع قدر مطلقى هرگاه متغیری مثل x وجود داشت، ابتدا داخل قدر مطلق را مساوی صفر قرار می دهیم تا ریشه ی آن بدست آید پس باتوجه به علامت ضریب x ، عبارت قدر مطلقى را به یک عبارت دو ضابطه ای تبدیل می کنیم.

مثال ۲۰ (مهم): عبارت‌های قدر مطلقى زیر را به صورت عبارت‌های دو ضابطه‌ای تبدیل کنید؟ 

۱) $y = |x - 3|$

۲) $y = |-2x + 6|$

✓ توابع قدر مطلق:

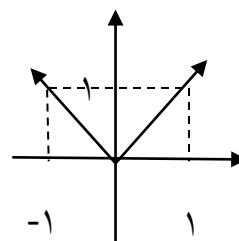
تابع $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ تابع قدر مطلق است که برای رسم آن تابع قدر مطلق را از بین می‌بریم و تابع را دو

ضابطه‌ای می‌کنیم

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

x	0	1
y	0	1

x	0	-1
y	0	1



دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد آن برابر $y \geq 0$ می‌باشد.

مثال ۲۱: توابع $y=|x|$ و $y=|2x-4|$ را دو ضابطه‌ای کرده و نمودار آن‌ها را رسم کنید. پس دامنه و برد

آن‌ها را از روی نمودار تعیین کنید؟



نکته طلایی: رسم توابع قدر مطلق به کمک انتقال را با یک مثال توضیح می‌دهم.

مثال ۹۴: نمودار توابع زیر را به روش انتقال رسم کنید سپس دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

۱) $y=|x|+2$

۲) $y=|x+3|-4$

۳) $y=-|x+1|+5$

۴) $y=-|x|-1$



نکته طلایی: با این روشی که الان به شما می‌گویم می‌توانید تمام نمودارهای که در روش‌های

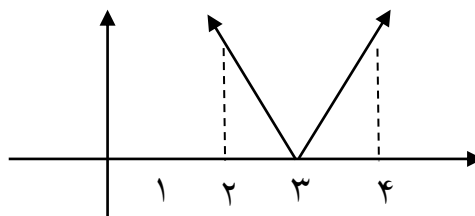
قبلی رسم کردیم را در کمتر از یک دقیقه رسم کنیم مثلاً فرض کنید می‌خواهیم نمودار تابع $y = |2x - 6| + 3$

۱ را رسم کنیم. ریشه داخل قدر مطلق برابر ۳ می‌باشد. ریشه را در یک جدول در وسط قرار داده و دو x دلخواه

بعد و قبل از ۳ می‌نویسیم و y هر سه x را بدست می‌آوریم ۳ نقطه را در روی محورهای مختصات نشان داده و

به هم وصل می‌کنیم.

x	۲	۳	۴
y	۳	۱	۳



تمرین ۳۵: اشتراک دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 36x}$ با دامنه‌ی تابع $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟



(۱) $R - \{36\}$ (۲) $R - \{0\}$ (۳) $R - \{0, 2, 6\}$ (۴) $R - \{0, 2, 36\}$

تمرین ۳۶: اگر $f(x) = (2k - 6)x + 10k$ تابعی ثابت باشد، حاصل $f(-1)$ کدام است؟



(۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۸

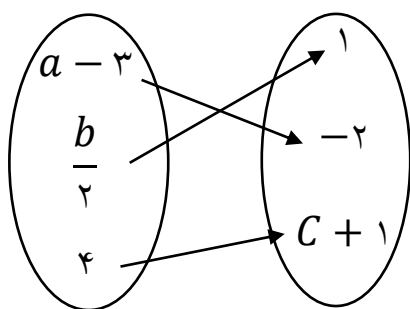
تمرین ۳۷: اگر رابطه $f = \{(-1, 6), (3, k - 1), (8, m + 2)\}$ بیانگر تابعی ثابت باشد و همچنین



رابطه‌ی $\frac{f(8)}{kb-1} = 2m$ برقرار باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

تمرین ۳۸: اگر نمایش پیکانی (ون) مقابل، یک تابع همانی باشد، واریانس اعداد a و b و c کدام است؟



$$\frac{2}{3}(2)$$

$$\frac{2}{3}(1)$$

$$\frac{5}{2}(4)$$

$$\frac{2}{5}(3)$$

تمرین ۳۹: اگر f تابعی همانی باشد حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2} \times f(\sqrt{2}) - f(4)}{(f(\frac{1}{2}))^2}$ کدام است؟



$$18(4)$$

$$-18(3)$$

$$16(2)$$

$$-16(1)$$

تمرین ۴۰: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟



$$y < -1(4)$$

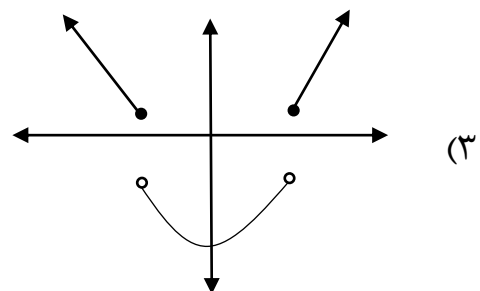
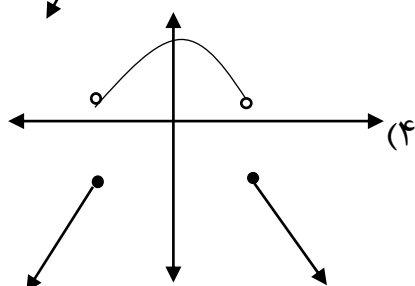
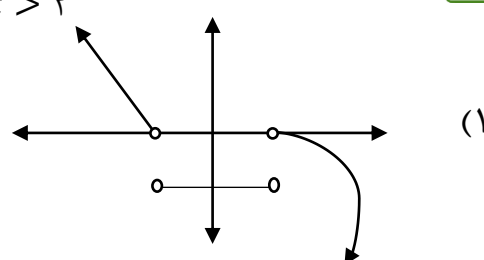
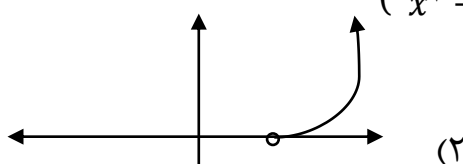
$$y > 0(3)$$

$$y > -1(2)$$

$$y < 1(1)$$

تمرین ۴۱: نمودار تقریبی تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & x > 2 \end{cases}$ کدام است؟

تمرین ۴۱: نمودار تقریبی تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & x > 2 \end{cases}$



تمرین ۴۲: با توجه به تابع علامت، حاصل عبارت مقابل چیست؟



$$A = \text{sign}(\sqrt{3} - 1) + 4\text{sign}(\pi - 4) - 2\text{sign}(x^2 + 3) = ?$$

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۵ (۴) ۵

تمرین ۴۳: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشند حاصل عبارت $f(g(-\pi)) + g(f(\sqrt{3}))$ کدام است؟



- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

تمرین ۴۴: نمودار تابع $f(x) = [2x] - 1$ با دامنه‌ی $D_f = [-1, 2)$ با محور x ها و خطوط عمودی $x = -1$



و $x = 0$ و $x = 1$ و $x = 2$ چه مساحتی ایجاد می‌کند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

تمرین ۴۵: با فرض آنکه $f(x) = 2k[x] - k + 7$ باشد، و رابطه‌ی $f(1/8) = 5$ برقرار باشد، مقدار $\frac{k}{2}$ کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

تمرین ۴۶: اگر نقطه $(4, m^2 - 3m)$ روی نیمساز ربع اول و سوم واقع باشد، قدر مطلق تفاضل مقادیر m



کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

تمرین ۴۷: نمودار توابع $f(x) = |x - 2|$ و $g(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$ در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟



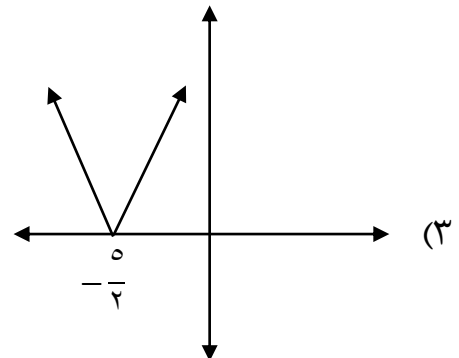
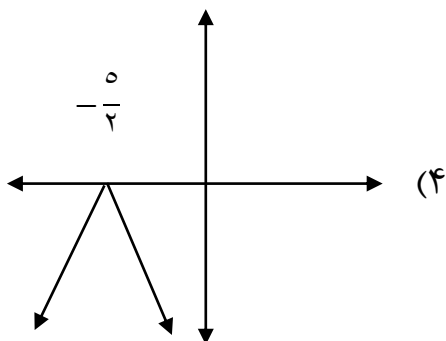
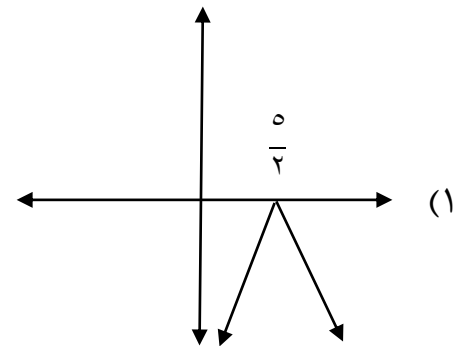
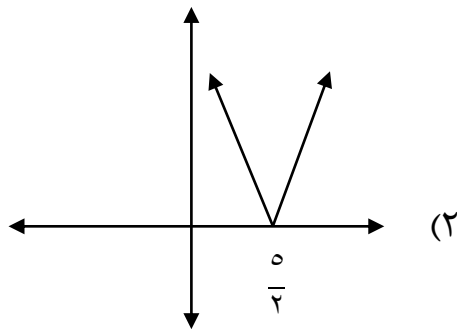
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

تمرین ۴۸: حاصل عبارت مقابل چیست؟ 

$$A = |3\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| - |-\sqrt{3}|$$

- (۱) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

تمرین ۴۹: نمودار تابع $f(x) = |2x - 5|$ کدام است؟ 



✓ اعمال روی تابع

یادآوری:

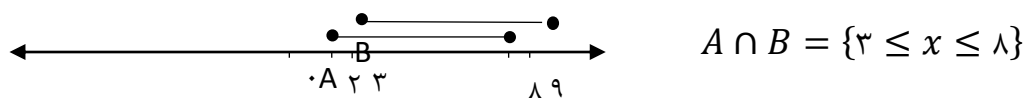
دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای: دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای به صورت $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ کل اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

دامنه‌ی توابع کسری (گویا): دامنه‌ی توابع کسری کل اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج می‌باشد زیرا ریشه‌های مخرج، مخرج را صفر کرده و کسر بی‌معنی می‌شود پس توابع کسری از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

اشتراک گرفتن از دو مجموعه:

اشتراک دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ برابر $A \cap B = \{2, 3\}$ می‌باشد و اشتراک دو مجموعه $A = \{2 \leq X < 8\}$ و $B = \{3 \leq x \leq 9\}$ را با استفاده از محور x ها به صورت زیر بدست می‌آوریم.



نکته ۲۵: اشتراک هر مجموعه با مجموعه $\mathbb{R}$ برابر همان مجموعه است.

✓ تفاضل دو مجموعه از هم:

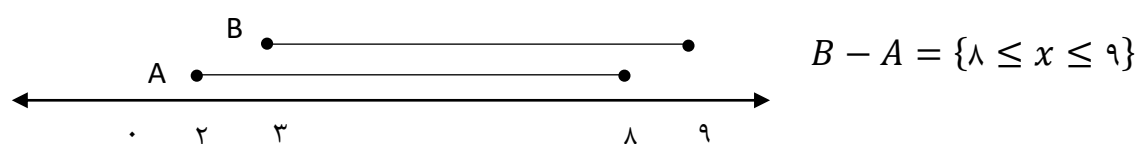
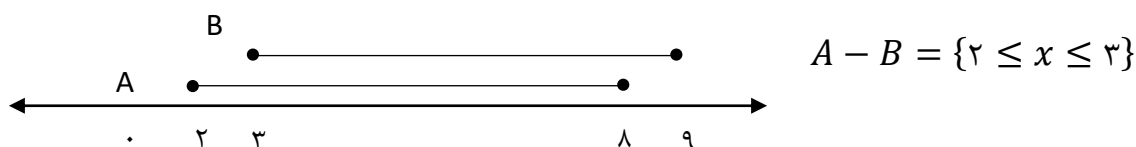
تفاضل دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ به صورت $A - B$ ، باید عضوهای مشترک A و B را از A خط بزنیم و نگاه می‌کنیم چه عضوهایی از A باقی می‌ماند.

$$A - B = \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 5\} = \{1\}$$

و به همین ترتیب برای محاسبه $B - A$ عضوهای مشترک A و B را از B کنار گذاشته و ملاحظه می‌کنیم که از B چه چیزهایی باقی می‌ماند.

$$B - A = \{2, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$$

و اگر A و B به صورت بازه باشند بهتر است آن‌ها را روی محور X نمایش دهیم و سپس مانند قبل محل کنیم.



مثال ۲۲: اگر $A = \{1 < x < 5\}$ و $B = \{1 \leq x \leq 5\}$ باشند حاصل

$A \cap B$ و $A - B$ و $B - A$ را بدست آورید؟

اعمال روی توابع با داشتن f و g به صورت زوج مرتبی:

اگر دو تابع f و g به صورت زوج مرتب در اختیار باشند برای آوردن توابع $f + g$ و $f - g$ و $f \times g$ ،

$\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ فقط کافی است x های مشترک f و g را پیدا کرده، سپس جمع و تفریق، ضرب و تقسیم را روی y آن‌ها

انجام دهیم.

نکته ۲۶: اگر خواسته باشیم تابع $2f$ را بدست آوریم باید عنصرهای دوم f را در عدد ۲ ضرب کنیم و همچنین برای بدست آوردن f^2 کافی است عنصرهای دوم تابع f را به توان ۲ برسانیم.

مثال ۲۳: اگر $f = \{(1,3), (4,6), (8,9)\}$ و $g = \{(4,1), (5,2), (8,3)\}$ باشند تابع $2f + g^2$ کدام

است؟

$\{(1,8), (4,10)\}$ (۱) $\{(1,10), (4,12)\}$ (۲)

$\{(4,12), (8,27)\}$ (۳) $\{(4,13), (8,27)\}$ (۴)

✓ اعمال روی توابع با داشتن ضابطه‌ی f و g :

اگر فرمول‌های f و g را داشته باشیم آن گاه ضابطه‌ها و دامنه‌های توابع $f + g$ ، $f - g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\text{ضابطه: } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ و دامنه: } D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$\text{ضابطه: } (f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ و دامنه: } D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$\text{ضابطه: } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ و دامنه: } D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\text{ضابطه: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ و دامنه: } D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$\text{ضابطه: } \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \text{ و دامنه: } D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid f(x) = 0\}$$

همان‌طور که مشخص می‌باشد دامنه‌ی توابع $f + g$ ، $f \times g$ و $f - g$ با یکدیگر مساوی هستند.

مثال ۲۴: با فرض آن‌که $f(x) = \frac{x-4}{x-5}$ و $g(x) = x - 5$ باشند ضابطه و دامنه‌ی توابع $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را **?**

بدست آورید؟

مثال ۲۵: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^3$ باشند، دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟ **?**

$$(1) \quad R - \{2\} \quad (2) \quad R - \{1\} \quad (3) \quad R - \{0\} \quad (4) \quad R$$

نکته ۲۶: اگر بخواهیم $(f + g)(1)$ را حساب کنیم چنین می‌نویسیم $(f + g)(1) = f(1) + g(1)$ حالا $f(1)$ و $g(1)$ را جداگانه حساب کرده و باهم جمع می‌کنیم.

۴۱

مثال ۲۶: اگر $f(x) = x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشند، حاصل $(2f - 3g)(2)$ کدام است؟ **?**

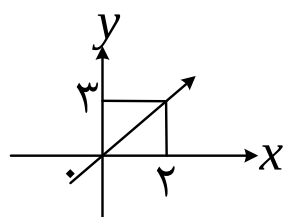
$$(1) \quad \frac{-11}{2} \quad (2) \quad \frac{11}{2} \quad (3) \quad \frac{23}{2} \quad (4) \quad \frac{-23}{2}$$

✓ رسم نمودار توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به کمک ضابطه و نمودار توابع f و g

در این گونه سوال‌ها همیشه ضابطه‌ها و نمودارهای f و g به ما داده می‌شوند که باید ابتدا دامنه‌ی آن‌ها را از روی نمودارها تعیین کنیم سپس به کمک فرمول‌های گفته شده دامنه و ضابطه تابع خواسته شده را بدست آمده و نمودار آن را به روش نقطه یابی یا انتقال رسم کنیم.

مثال ۲۷: اگر $g(x) = 4x^2$ و نمودار تابع $\left(\frac{g}{f}\right)x$ به شکل مقابل باشد، ضابطه‌ی

تابع $f(x)$



کدام است؟

نکته ۲۷: اگر f و g دو تابع چند ضابطه‌ای بودند توجه کنید که دامنه‌ی هر ردیف آن‌ها با یکدیگر یکسان است اگر بخواهیم تابع $f+g$ را رسم کنیم، ابتدا ضابطه اول f را با ضابطه‌ی اول g جمع می‌کنیم، سپس ضابطه‌ی دوم f را با ضابطه‌ی دوم g جمع خواهیم کرد تا $f+g$ ساخته شود.

مثال ۲۸: با فرض آنکه $f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 2 \\ 1 & x < 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ -x & x < 2 \end{cases}$ باشند،

نمودار تابع $(f+g)(x)$ را رسم کنید، دامنه و برد آن چیست؟

مثال ۲۹: با فرض $f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -3 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$ خط $y=3$ نمودار

تابع $(f-g)(x)$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

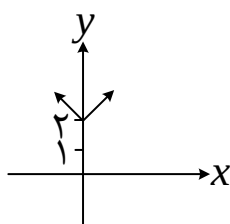
(۱) هیچ نقطه (۲) یک نقطه (۳) دو نقطه (۴) بی شمار نقطه



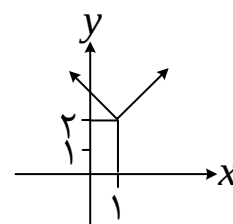
نکته طلایی: اگر یکی از دو تابع داده شده، چند ضابطه‌ای باشد مانند مثال های زیر عمل خواهیم کرد.

مثال ۳۰: با فرض آنکه $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 4 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = -2$ باشند، نمودار تابع $f \times g$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید؟

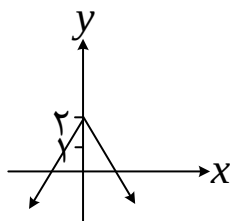
مثال ۳۱: اگر $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = -2$ باشند نمودار تابع $f - g$ کدام است؟



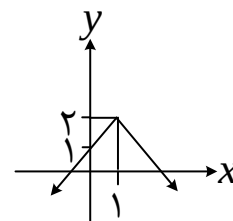
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

تمرین ۵۰: اگر توابع f و g به صورت مقابل باشند، حاصل $(\frac{f}{g})(5)$ کدام است؟



f:	x	۱	۲	۳	g:	x	۱	۲	۳
	y	۴	۹	۱۴		y	۱	۸	۲۷
		$\frac{9}{5}$ (۴)	$\frac{10}{7}$ (۳)				$\frac{11}{25}$ (۲)	$\frac{24}{125}$ (۱)	

تمرین ۵۱: اگر $g(x) = 10x - 2$ و $(f + g)(x) = 25x + 14$ باشد، حاصل $f(0)$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

تمرین ۵۲: اگر $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 8), (4, -1)\}$ و $g = \{(0, 5), (2, 6), (4, 9), (7, 8)\}$



باشند تابع $f + 2g$ کدام است؟

$\{(2, 20), (4, 17)\}$ (۲)

$\{(2, 21), (4, 17)\}$ (۱)

$\{(2, 18), (4, 23)\}$ (۴)

$\{(2, 10), (4, 8)\}$ (۳)



تمرین ۵۳: اگر $f(x) = x - 5$ و $(f \times g)(x) = x^2 - 12x + 35$ باشند، ضابطه تابع $(f - g)(x)$

کدام است؟

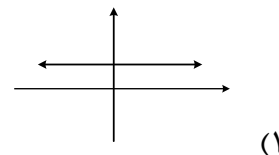
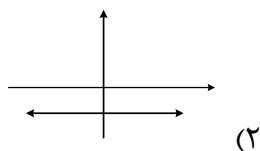
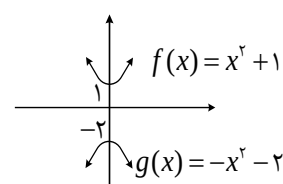
$x + 2$ (۴)

$x - 2$ (۳)

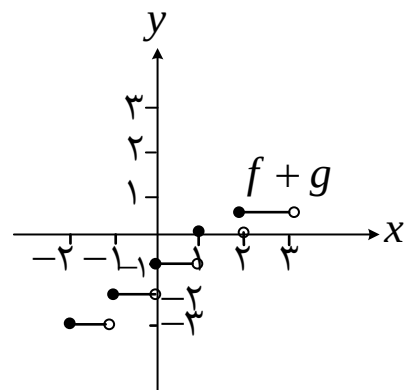
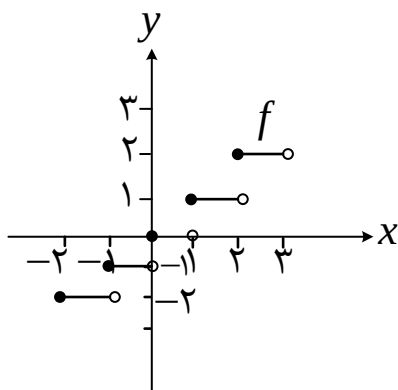
۲ (۲)

-۲ (۱)

تمرین ۵۴: با توجه به نمودارهای f و g ، نمودار $g + f$ کدام است؟



تمرین ۵۵: اگر نمودار توابع f و $f+g$ به صورت مقابل باشند، ضابطه تابع g کدام است؟ 



(۱) $g(x) = 1$

(۲) $g(x) = -1$

(۳) $g(x) = x^2$

(۴) $g(x) = -x^2$

تمرین ۵۶: یک شرکت سرمایه گذاری بزرگ، دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای X 

تن کالا در کارخانه A به ترتیب $(-X^2 + 10X)$ و $(4X + 2)$ و در کارخانه B به ترتیب $(-2X^2 + 8X)$

و $(2X - 30)$ واحد باشد، بیشترین سود این شرکت سرمایه گذاری (هولدینگ) چند واحد است؟

(۴) ۵۲

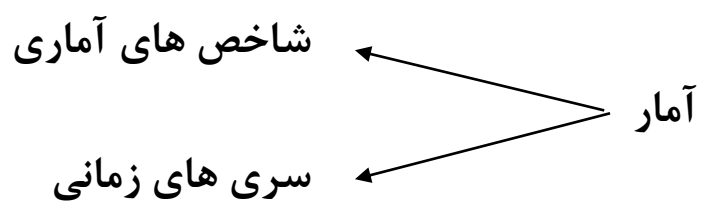
(۳) ۴۸

(۲) ۴۲

(۱) ۴۰

فصل سوم:

آمار



✓ شاخص های آماری

شاخص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد شاخص ها معمولاً بر اساس چند آمار محاسبه می شوند که هدف تحلیل و تفسیر آنهاست.

مهمترین شاخص های کمی عبارتند از:

(۱) شاخص خط فقر:

یک متغیر کمی نسبتي است و بیانگر حداقل درآمدی است که برای زندگی یک ماه به ازای هر نفر مورد نیاز است.

نکته ۲۸: میزان خط فقر بین المللی که توسط بانک جهانی اعلام می شود ۱۲۲۰۰۰ تومان در ماه برای یک نفر می باشد و خط فقر یک ایرانی را حدود ۵۴۰ هزار تومان (در سال ۹۵) در ماه می دانند و در سال ۹۶، ۶۰۰ هزار تومان می باشد.

مثال ۳۲: اگر خط فقر در یک اداره به روش نصف میانگین، برابر ۲ میلیون تومان باشد و درآمد افراد این اداره بر حسب میلیون تومان به صورت ۲ و a و ۶ و ۱/۵ و ۴ و ۲/۵ و ۳ و ۵ باشند، مقدار a کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

نکته ۲۹: برای محاسبه خط فقر از دو روش زیر استفاده می کنیم :

۱- روش نصف میانه درآمد ها

۲- روش نصف میانگین درآمد ها

در روش اول میانه درآمد ها را پیدا می کنیم و آن را نصف می کنیم تا خط فقر بدست آید و در روش دوم میانگین درآمد ها را محاسبه می کنیم و نصفش می کنیم، عدد حاصل خط فقر را نشان می دهد.

۲) شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی:

این شاخص هم، متغیری کمی و نسبی است. میانگین مبلغ پرداخت شده از سری مصرف کنندگان برای مجموعه ای از تعداد زیادی از کالاها و خدمات در طول یکسال را شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی می نامیم. این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یکسال پایه نشان می دهد. اگر این شاخص زیاد شود می گوئیم تورم رخ داده است به عبارت دیگر اگر این شاخص زیاد شود قدرت خرید مردم کم می شود و برعکس.

نکته ۳۰: تورم بین سال پایه و سال مورد نظر از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\text{درصد تورم} = \frac{(\text{شاخص بهای کالا در سال مورد نظر}) - (\text{شاخص بهای کالا در سال پایه})}{(\text{شاخص بهای کالا در سال پایه})} \times 100$$

نکته ۳۱: اگر قیمت یک کالا در سال پایه برابر x و در سال مورد نظر برابر y باشد و قیمت کالای دیگری در سال پایه برابر z و در سال مورد نظر برابر t باشد و همچنین مقدار مصرف این کالاها در سال پایه به ترتیب m و n کیلوگرم باشند، شاخص بهای این دو کالا برابر است با:

$$\text{شاخص بهای این کالاها} = \frac{(y \times m) + (t \times n)}{(x \times m) + (z \times n)} \times 100$$

مثال ۳۳: اگر شاخص بهای گوشت قرمز در سال ۹۶ برابر ۱۲۰ و در سال ۹۰ (سال پایه) برابر ۸۰ باشد، مقدار تورم چند درصد است؟

مثال ۳۴: سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده است قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰۰ تومان می باشد و در سال ۹۵ این قیمت ها ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ تومان می رسند با فرض آنکه مقدار مصرف نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۱۰۰ و ۴۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای نان و گوشت (سبد خانوار) چه قدر است؟

۳) شاخص نرخ بیکاری:

در علم اقتصاد به تمام افرادی که در محدوده‌ی سنی ۱۶ تا ۶۵ سال هستند و توانایی انجام کار را دارند جمعیت فعال می‌گوییم (یعنی جمعیت فعال هم شامل افراد شاغل است و هم بیکار) البته در بعضی از دسته بندیها، دانش آموزان، دانشجویان و زنان دار را جزء جمعیت فعال حساب نمی‌کنند.

شاخص نرخ بیکاری، عددی است که در واقع درصد افراد بیکار را نشان می‌دهد و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\text{شاخص نرخ بیکاری} = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

$$\text{تعداد شاغلین} + \text{تعداد بیکاران} = \text{جمعیت فعال}$$

مثال ۳۵: در یک کشور، تعداد بیکاران ۳ میلیون نفر و تعداد شاغلین ۱۷ میلیون نفر است شاخص نرخ بیکاری 

در این کشور چند درصد است؟

۴) شاخص توده بدنی:

با این شاخص میزان اضافه وزن یا کمبود وزن مشخص می‌شود به همین دلیل به شاخص سلامت هم معروف است و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$BMI = \frac{\text{وزن (کیلوگرم)}}{\text{مربع قد (متر)}}$$

مثال ۳۶: احمد ۴۰ سال سن دارد، وزنش ۵۸ کیلوگرم است و قد آن ۱۶۳ سانتی متر است. شاخص سلامت او 

چقدر است؟

۵) شاخص پایه آموزش:

خوانایی متن، یعنی میزان راحتی درک متن از طریق انتخاب واژه های مناسب و رعایت دستور نگارش، یکی از شاخص های خوانایی که مشخص می کند یک کتاب به زبان لاتین، مخصوص چه پایه ای باشد، به صورت زیر تعریف می شود.

$$[0.4 \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

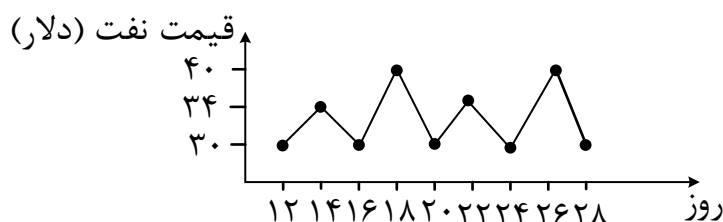
مثال ۳۷: برای کتابی که هر جمله ی آن به طور متوسط ۱۵ کلمه دارد و لغات دشوار هر جمله ۱۰ درصد است شاخص پایه آموزش را بدست آورید.

✓ سری های زمانی :

اگر داده های آماری را طی فواصل زمانی منظم جمع آوری کنیم یک سری زمانی ایجاد می شود حال اگر نقاط بدست آمده از جمع آوری داده ها را به طور متوالی به هم وصل کنیم، نمودار سری زمانی بدست می آید.

نکته ۳۲: بعضی از نمودارهای سری زمانی، حالت تکرار شونده (متناوب) دارند یعنی در مقاطع خاصی مرتباً تکرار می شوند.

مثال ۳۸: اگر قیمت نفت در ماه اکتبر رفتار زیر را داشته باشد، با توجه به نمودار روبرو قیمت نفت در روز ششم ماه اکتبر چند دلار است؟



۵۰

✓ **درون یابی:** پیدا کردن مقدار تقریبی مورد نظر بین دو داده ی را درون یابی می گوئیم.

اگر به کمک یک پاره خط، این کار را انجام دهیم اصطلاحاً می گوئیم درون یابی خطی کرده ایم.



مثال ۳۹: با توجه به جدول زیر که نشان دهنده‌ی تعداد نوزادان متولد شده در یک روز خاص در شهر تبریز است مشخص کنید در ساعت ۹ صبح تقریباً چند نوزاد متولد شده‌اند.

ساعت	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
تعداد نوزادان	۴۰	۶۶	۲۸	۹۴	۱۰۰	۵۰	۹۱	۱۸	۳۴



نکته ۳۳: ممکن است در محاسبات درون یابی مقداری خطا هم وجود داشته باشد که در این صورت مقدار خطا برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده یعنی:

$$e = |\text{مقدار تخمین زده شده} - \text{مقدار واقعی}|$$



مثال ۴۰: جدول زیر، نشان دهنده‌ی تعداد نان های فروخته شده در یک ثانوی در ساعت های مختلف روز می باشد.

ساعت	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
تعداد نان های فروخته شده	۵۰	۶۰	۴۰	۵۶	۷۰

اگر بدانیم در ساعت ۱۱، دقیقاً ۵۲ نان فروخته شده مقدار خطای محاسباتی مربوط به درون یابی در ساعت ۱۱، چه قدر است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

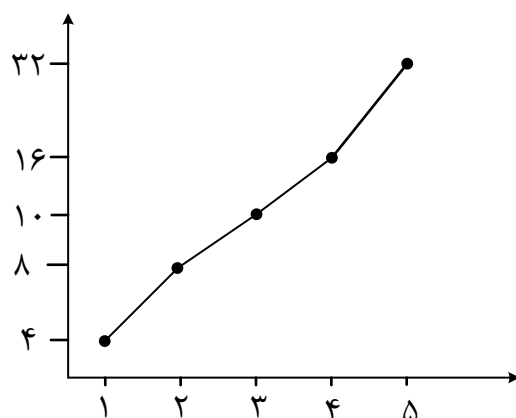
✓ برون یابی:

اگر مقدار داده خواسته شده را که قبل یا بعد از زمان مشخصی است بدست آوریم برون یابی کرده ایم.

در این روش میانگین زمان ها: x ها و میانگین مقدار متغیر ها y ها را جداگانه بدست می آوریم تا نقطه A بدست آید که به آن نقطه میانگین می گوئیم پس این نقطه میانگین را با یکی از نقاطی که از نظر زمانی به زمان مورد نظر ما نزدیک تر است در نظر گرفته و شیب و معادله خط گذرنده از آنها را می نویسیم.

مثال ۴۱: نمودار مقابل، فروش محصولی را در ۵ سال اول تولید کالا نشان می دهد مقدار تخمینی فروش این

محصول در سال هفتم چند میلیون تومان است؟



۴۸ (۱)

۴۹ (۲)

۵۰ (۳)

۵۱ (۴)

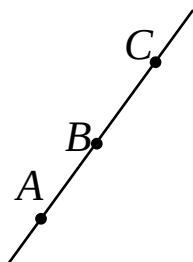
نکته ۳۴: مانند مسائل درون یابی در مسائل برون یابی هم ممکن است خطا داشته باشیم خطای برون یابی برابر است با:

$$e = |\text{مقدار تخمین زده شده} - \text{مقدار واقعی}|$$



نکته ۳۵: اگر نقطه خواسته شده به همراه دو نقطه قبل و بعد آن روی یک خط راست باشند، درون یابی

خط ندارد.



ولی در شکل مقابل درون یابی در نقطه C دارای خطا است زیرا A و B و C روی یک خط منحنی هستند نه خط راست.

